پیوست دوم

نمایش پارامتری یک تابع

دو معادله

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad (1)$$

را که در آن t به بازه $[T_1,T_2]$ تعلق دارد، در نظر می‌گیریم. به هر مقدار t مقادیری از y,x متناظر می‌گردد (توابع ψ,φ یک- مقداری فرض شده‌اند). اگر مقادیر y,x را به عنوان نقطه‌ای در صفحه مختصات $xy-$ در نظر بگیریم، آنگاه به هر مقدار t نقطه معینی در صفحه متناظر می‌گردد. وقتی t از T_1 تا T_2 تغییر کند، این نقطه یک منحنی در صفحه رسم می‌نماید. معادلات (1) **معادلات پارامتری** این منحنی، t **پارامتر** و **پارامتری** روشی است که منحنی با معادلات (1) نمایش داده شده است.

به علاوه فرض کنیم که تابع $x=\varphi(t)$ دارای تابع وارون $t=\phi(x)$ باشد و در این صورت، بدیهی است که، y تابعی از x است؛

$$y=\psi[\phi(x)]. \qquad (۲)$$

لذا، معادلات $y(1)$ را به عنوان تابعی از x تعریف می‌کنند و می‌گوییم که تابع y از x به صورت پارامتری نمایش داده شده است. عبارت صریح بستگی y به x، $y=f(x)$، با حذف t از معادلات (1) بدست می‌آید.

معادلات بعضی منحنی‌ها در شکل پارامتری

۱ . دایره: دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع R داده شده است (مطابق شکل زیر). زاویه بین محور X ها و شعاعی را که به یک نقطه $M(x,y)$ وصل می‌شود با t نمایش می‌دهیم. در این صورت مختصات هر نقطه از دایره در عباراتی از پارامتر t به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

شکل ۱

این‌ها معادلات پارامتری دایره هستند. اگر پارامتر t را از این معادلات حذف کنیم، معادله‌ای از دایره را بدست می‌آوریم که فقط شامل y, x است. با مربع نمودن معادلات پارامتری و جمع آن‌ها بدست می‌آوریم

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ یا } x^2 + y^2 = R^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)$$

۲ . بیضی: بیضی با معادله

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

داده شده است. قرار می‌دهیم

$$x = a\cos t. \qquad (2')$$

با گذاردن این عبارت در (1) و انجام محاسبات لازم، بدست می‌آوریم

$$y = b\sin t. \qquad (2'')$$

معادلات

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi) \qquad (2)$$

معادلات پارامتری بیضی هستند. حال به مفهوم هندسی پارامتر t می‌پردازیم. دو دایره رسم می‌کنیم که مراکز آن‌ها مبدأ مختصات و شعاع های آن‌ها نیمه قطرهای b, a باشد (مطابق شکل زیر).

فرض کنیم $M(x, y)$ نقطه‌ای روی بیضی بوده و فرض کنیم B نقطه‌ای از دایره بزرگ با طولی مساوی با طول M باشد. زاویه بین شعاع OB و محور X ها را با t نمایش می‌دهیم. از روی شکل مستقیماً دیده می‌شود که

$$x = OP = a\cos t \quad (2')$$

$$CQ = b\sin t.$$

از $(2'')$ نتیجه می‌گیریم که $CQ = y$؛ به عبارت دیگر،خط مستقیم CM موازی با محور X ها است. لذا، در معادلات (2) t زاویه‌ای است که بوسیله شعاع OB و محور طول‌ها تشکیل شده است. زاویه t گاهی اوقات **زاویه خروج از مرکز** نامیده می‌شود.

شکل ۲

۳ . سیکلوئید: **سیکلوئید** یک منحنی است که بوسیله نقطه‌ای روی محیط یک دایره توصیف می‌شود هرگاه دایره روی خطی مستقیم بدون لغزش (سرخوردن) حرکت کند (مطابق شکل زیر). فرض کنیم وقتی حرکت شروع شد نقطه M از دایره متحرک در مبدأ مختصات قرار داشته باشد. به تعیین مختصات M می‌پردازیم وقتی دایره به اندازه زاویه t چرخیده باشد.

شکل ۳

اگر a شعاع دایره متحرک باشد، از روی شکل دیده می‌شود که

$$x = OP = OB - PB$$

اما به دلیل آنکه دایره بدون لغزش حرکت می‌کند، داریم

$$OB = \overset{\frown}{MB} = at \quad , \quad PB = MK = a\sin t.$$

بنابراین $x = at - a\sin t = a(t - \sin t)$. به علاوه

$$y = MP = KB = CB - CK = a - a\cos t = a(1 - \cos t).$$

معادلات

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi) \qquad (3)$$

معادلات پارامتری سیکلوئید هستند. وقتی t بین 0و 2π تغییر می‌کند، نقطه M یک قوس از سیکلوئید را طی می‌نماید.

۴ . آستروئید:

آستروئید یک منحنی است که بوسیله معادلات پارامتری زیر نمایش داده شده است:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t. \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

اگر جملات هر دو معادله را بتوان $\frac{2}{3}$ رسانیده و حاصل را با هم جمع کنیم، رابطه زیر را بین y, x بدست می‌آوریم:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) \qquad \text{یا} \qquad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

نشان داده می‌شود که این منحنی دارای شکل زیر است. این منحنی را می‌توان بوسیله مسیر یک نقطه مشخص بر روی محیط دایره‌ای به شعاع $\frac{a}{4}$ که روی دایره دیگری که شعاع آن a است (بدون لغزش) در حرکت می‌باشد رسم نمود. (توجه کنید که دایره کوچکتر همواره در داخل دایره بزرگتر باقی می‌ماند).

شکل ۴

مشتق تابعی که به صورت پارامتری نمایش داده شده است

فرض کنیم تابع y از x با معادلات پارامتری

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad (t_0 \le t \le T) \qquad (1)$$

نمایش داده شده باشد. فرض کنیم این توابع دارای مشتق بوده و این که تابع $x=\varphi(t)$ دارای تابع وارون مشتق‌پذیر $t=\phi(x)$ باشد. در این صورت تابع $y=f(x)$ را که با معادلات پارامتری تعریف شده است، می‌توان به عنوان یک تابع مرکب در نظر گرفت:

$$y=\psi(t) \qquad , \qquad t=\phi(x)$$

که در آن t متغیر واسطه است. بنابر قانون مشتق یک تابع مرکب بدست می‌آوریم

$$y'_x=y'_t t'_x=\psi'(t)\phi'(x). \qquad (2)$$

از قضیه مربوط به مشتق یک تابع وارون، نتیجه می‌شود که

$$\phi'(x)=\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

با قرار دادن این عبارت در (2)، داریم $y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ یا $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$.

فرمول بالا امکان یافتن مشتق y'_x از تابعی که به صورت پارامتری نمایش داده شده را بدست می دهد بدون آن‌که مجبور باشیم y را به صورت تابعی صریح از x داشته باشیم.

مثال: (a) تابع y از x با معادلات پارامتری

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

داده شده است. پیدا کنید $\frac{dy}{dx}$ را، اولاً به ازای هر مقدار t، ثانیاً برای $t=\frac{\pi}{4}$.

(b) ضریب زاویه خط مماس بر سیکلوئید

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

را در یک نقطه دلخواه پیدا کنید.

حل. (a) اولاً

$$y'_x=\frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'}=\frac{a\cos t}{-a\sin t}=-\cot g\, t.$$

ثانیاً

$$(y'_x)_{t=\frac{\pi}{4}}=-cotg\frac{\pi}{4}=-1.$$

(b) ضریب زاویه خط مماس در هر نقطه مساوی با مشتق y'_x در آن نقطه است، یعنی، برابر است با $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. اما

$$x'_t = a(1-\cos t) \quad , \quad y'_t = a\sin t.$$

در نتیجه،

$$y'_x = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = co\,tg\,\frac{t}{2} = tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right).$$

بنابراین، ضریب زاویه خط مماس بر سیکلوئید در هر نقطه مساوی با $tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)$ است، که در آن t مقدار پارامتر متناظر به این نقطه می‌باشد. اما مطلب فوق بدین معنی است که زاویه α از شیب خط مماس با محور X ها مساوی با $\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}$ می‌باشد (برای مقادیری از t که بین $\pi, -\pi$ قرار دارند).

مشتقات مراتب مختلف توابع ضمنی و توابعی که دارای نمایش پارامتری هستند

۱ . فرض کنیم تابع y از متغیر x به صورت ضمنی با معادله

$$f(x,y)=0 \qquad (1)$$

داده شده باشد. روش یافتن $\frac{dy}{dx}$ را در فصل سوم دیده‌ایم. برای یافتن مشتق دوم y نسبت به x بایستی از $\frac{dy}{dx}$ یکبار دیگر نسبت به x مشتق بگیریم، یعنی

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

به همین ترتیب مشتقات مراتب بالاتر را می‌توان با مشتق‌گیری متوالی بدست آورد، یعنی

$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ و ... و به طور کلی $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$.

در مثال زیر این روش توضیح داده شده است.

مثال: تابع y از متغیر x به صورت ضمنی با معادلات زیر داده شده است:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \quad (1) \qquad \text{و} \qquad (2) \quad (x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)+1=0.$$

$\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ را پیدا کنید.

حل. (1) از تمامی جملات نسبت به x مشتق می‌گیریم و به این مطلب توجه داریم که y تابعی از x است:

$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$ که از آن بدست می‌آوریم $\frac{dy}{dx}=\frac{-b^2x}{a^2y}$. بار دیگر نسبت به x مشتق می‌گیریم (و بخاطر داریم که y تابعی از x است):

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)=\frac{-b^2}{a^2}.\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}.$$

با جایگذاری مقدار بدست آمده برای $\frac{dy}{dx}$ در عبارت بالا دیده می‌شود که

$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}.\frac{y+x\frac{b^2}{a^2}.\frac{x}{y}}{y^2}$ و یا پس از ساده نمودن؛ $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2\left(a^2y^2+b^2x^2\right)}{a^4y^3}$.

از معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ نتیجه می‌شود که $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$.

بنابراین مشتق مرتبه دوم y نسبت به x به صورت $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-b^4}{a^2y^3}$ نمایش داده می‌شود.

(2) از طرفین معادله نسبت به x مشتق گرفته و توجه داریم که y تابعی از x است:

$$3\left(x^2+y^2\right)^2\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)-3\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)=0$$

و لذا پس از ساده نمودن داریم

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{6x[(x^2+y^2)^2-1]}{6y[(x^2+y^2)^2-1]}=-\frac{x}{y}.$$

حال $\frac{d^2y}{dx^2}$ را محاسبه می‌نمائیم:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{1.y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}=-\frac{y-x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}.$$

۲ . اکنون به بررسی مسأله یافتن مشتقات مراتب بالاتر تابعی می‌پردازیم که به صورت پارامتری نمایش داده شده است. فرض کنیم تابع y از x با معادلات پارامتری داده شده باشد:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t). \end{cases} \qquad (t_0\le t\le T) \qquad (1)$$

تابع $x=\varphi(t)$ دارای تابع وارون $t=\phi(x)$ بر بازه $[t_0,T]$ است.

در قسمت قبل نشان دادیم که در این حالت مشتق $\frac{dy}{dx}$ با معادله

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \qquad (2)$$

تعریف شده است. برای یافتن مشتق دوم، $\frac{d^2y}{dx^2}$ از (2) نسبت به x مشتق گرفته و توجه داریم که t تابعی از x است:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx}. \qquad (3)$$

اما

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)-\frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

و

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

با جایگذاری عبارت های بالا در (3) بدست می‌آوریم

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

این فرمول را می‌توان در شکل فشرده‌تر به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

به روشی مشابه می‌توانیم مشتقات $\frac{d^3y}{dx^3}$، $\frac{d^4y}{dx^4}$ و الی آخر را پیدا کنیم.

مثال: (1) تابع y از x به صورت پارامتری با معادلات زیر نمایش داده شده است:

$$(a)\quad \begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=b\sin^3 t \end{cases} \qquad , \qquad (b)\quad \begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}.$$

مشتق دوم y نسبت به x را پیدا کنید.

(2) اگر $x=e^{-t}$, $y=t^3$ ؛ $\frac{d^3y}{dx^3}=y'''_x$ را پیدا کنید.

حل. (1) قسمت (a): ابتدا $\frac{dy}{dx}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dt}=y'_t=3b\sin^2 t\cos t\ ;\ \frac{dx}{dt}=x'_t=-3a\cos^2 t\sin t;$$
$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=-\frac{3b\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t}=\frac{-b}{a}tg\,t \qquad \left(t\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

سپس $\frac{d^2y}{dx^2}=y''_x$ را با استفاده از فرمول

$y''_x=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$ بدست می‌آوریم که در آن $(y'_x)'_t=-\frac{b}{a\cos^2 t}$. بنابراین

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y''_x=-\frac{b}{a\cos^2 t(-3a\cos^2 t\sin t)}=\frac{b}{3a^2\cos^4 t\sin t}.$$

قسمت (b):

$$\frac{dx}{dt}=x'_t=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t);$$
$$\frac{dy}{dt}=y'_t=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\cos t+\sin t);$$
$$\frac{dy}{dx}=y'_x=\frac{\cos t+\sin t}{\cos t-\sin t}$$ و

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y''_x=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\left(\frac{\cos t+\sin t}{\cos t-\sin t}\right)'_t}{e^t(\cos t-\sin t)}=\frac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}.$$

(2) داریم $y'_t=3t^2\ ;\ x'_t=-e^{-t}$ که از آنجا $y'_x=\frac{-3t^2}{e^{-t}}=-3e^t t^2$.

سپس مشتق دوم را پیدا می‌کنیم:

$$y''_x=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=-\frac{-(3e^t t^2+6te^t)}{-e^{-t}}=3t\,e^{2t}(t+2).$$

و بالاخره مشتق سوم را پیدا می‌کنیم:

$$y'''_x=\frac{(y''_x)'_t}{x'_t}=\frac{3e^{2t}\left[2(t^2+2t)+2t+2\right]}{-e^{-t}}=-6e^{3t}(t^2+3t+1).$$

توابع هیپر بولیک

در بسیاری از کاربردهای آنالیز ریاضی با ترکیب‌هایی از توابع نمایی به شکل $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ و $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ مواجه می‌شویم. این ترکیب ها به عنوان توابع جدیدی به شکل زیر مشخص می‌گردند:

$$\left.\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

اولین تابع **سینوس هیپربولیک** و دومین تابع **کسینوس هیپربولیک** نامیده می‌شود. این توابع را می‌توان برای تعریف چهار تابع دیگر بکار برد:

تانژانت هیپربولیک، $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

کوتانژانت هیپربولیک، $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

سکانت هیپربولیک، $\sec hx = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

کسکانت هیپربولیک، $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

توابع $\sinh x$، $\cosh x$، $\tanh x$ و $\sec hx$ به طور بدیهی برای تمام مقادیر x تعریف شده‌اند. اما توابع $\coth x$ و $\csc hx$ به ازای هر $x \neq 0$ تعریف شده‌اند.

از روی تعاریف توابع $\cosh x, \sinh x$ (فرمول‌های (1)) روابطی مشابه آنچه در مورد توابع مثلثاتی دیده‌ایم بدست می‌آید:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad (2)$$

$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b \qquad (3)$$

$$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b \qquad (3'')$$

$$\tanh x = \frac{1}{\coth x} \qquad (4)$$

$$1 - \tanh^2 x = \sec h^2 x \qquad (5)$$

$$1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x. \qquad (6)$$

در حقیقت،

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1.$$

به علاوه، با توجه به این که $\cosh(a+b) = \dfrac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2}$ بدست می‌آوریم

$$\cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b = \frac{e^a + e^{-a}}{2}\frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2}\frac{e^b - e^{-b}}{2}$$
$$= \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \cosh(a+b)$$

فرمول $(3')$ به طریق مشابه اثبات می‌گردد. همچنین داریم

$$1-\tanh^2 x = 1-\frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}=\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x}=\frac{1}{\cosh^2 x}=\sec h^2 x$$

و این اثبات فرمول (5) است. به شکل‌های زیر توجه نمائید:

شکل ۵

شکل ۶

شکل ۷

عنوان «توابع هیپر بولیک» از این مطلب به ذهن می‌رسد که توابع $\sinh t$, $\cosh t$ همان نقشی را در نمایش پارامتری هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ ایفا می‌کنند که توابع مثلثاتی $\sin t$ و $\cos t$ در نمایش پارامتری دایره $x^2 + y^2 = 1$ انجام می‌دهند.

در حقیقت، با حذف پارامتر t از معادلات

$$x = \cos t \text{ و } y = \sin t$$

بدست می‌آوریم $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$ یا (معادله دایره) $x^2 + y^2 = 1$.

به روشی مشابه، معادلات

$$\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases}$$

معادلات پارامتری هذلولی هستند. در حقیقت، با به توان دو رساندن هر کدام از معادلات و تفاضل دومی از اولی، بدست می‌آوریم $x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t$. چون بنابر (2)، عبارت طرف راست مساوی واحد است، داریم $x^2 - y^2 = 1$ که معادله هذلولی است.

مشتق توابع هیپربولیک بافرمول‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \qquad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$(\coth x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}, \quad (\sec hx)' = -\sec hx \tanh x,$$

$$(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \coth x.$$

کلیه روابط فوق از روی تعریف توابع هیپربولیک بدست می‌آیند، به عنوان مثال برای تابع $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ داریم

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$